अध्याय 3

## 3.1 समग्र अवलोकन (Overview)

**3.1.1** आव्यूह संख्याओं (या फलनों) का एक आयताकार क्रमित क्रम विन्यास है। उदाहरणार्थ,

$$A = \begin{matrix} x & 4 & 3 \\ 4 & 3 & x \\ 3 & x & 4 \end{matrix}$$

संख्याओं (या फलनों)आव्यूह के अवयव या प्रविष्ठियाँ कहते हैं।

आव्यूह के अवयवों की क्षैतिज़ रेखाएँ, आव्यूह की पंक्तियाँ (Rows) तथा ऊर्ध्व रेखाएँ आव्यूह के स्तंभ (Columns) कहलाते हैं।

### 3.1.2 *आव्यूह की कोटि (Order of a matrix)*

$m$ पंक्तियों तथा $n$ स्तंभों वाले किसी आव्यूह को $m \times n$ कोटि (Order) का आव्यूह अथवा केवल $m \times n$ आव्यूह कहते हैं।

उपर्युक्त उदाहरण में, A एक $3 \times 3$ कोटि का आव्यूह अर्थात् $3 \times 3$ आव्यूह है।

व्यापक रूप में एक $m \times n$ आव्यूह का निम्नलिखित आयताकार क्रम विन्यास होता है:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \text{ तथा } i, j \in \mathbf{N}.$$

अवयव $a_{ij}$ वह अवयव है जो $i$ वीं पंक्ति और $j$ वें स्तंभ में स्थित होता है तथा इसे A का $(i, j)$वाँ अवयव कहते हैं। $m \times n$ आव्यूह में अवयवों की संख्या $mn$ होती है।

### 3.1.3 *आव्यूह के प्रकार (Types of Matrices)*

(i) एक आव्यूह, पंक्ति आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक पंक्ति होती है।

(ii) एक आव्यूह, स्तंभ आव्यूह कहलाता है यदि उसमें केवल एक स्तंभ होता है।

(iii) एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के समान होती है, एक वर्ग आव्यूह (*Square matrix*) कहलाता है। अतः एक $m \times n$ आव्यूह, वर्ग आव्यूह कहलाता है यदि $m = n$ हो और उसे '$n$' कोटि का वर्ग आव्यूह कहते हैं।

(iv) एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ *विकर्ण आव्यूह* (*Diagonal matrix*) कहलाता है यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके सभी अन्य अवयव शून्य होते हैं अर्थात् एक आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ विकर्ण आव्यूह कहलाता है यदि $b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$ हो।

(v) एक विकर्ण आव्यूह, अदिश आव्यूह (*Scalar matrix*) कहलाता है यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते हैं, अर्थात् एक वर्ग आव्यूह $B = [b_{ij}]_{n\times n}$ अदिश आव्यूह कहलाता है यदि $b_{ij} = 0$, जब $i \neq j$, $b_{ij} = k$, जब $i = j$, जहाँ $k$ कोई अचर है।

(vi) एक वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव एक होते हैं तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं, तत्समक आव्यूह (*Identity matrix*) कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ एक तत्समक आव्यूह है यदि $a_{ij} = 1$, जब $i = j$ हो तथा $a_{ij} = 0$, जब $i \neq j$ हो।

(vii) एक आव्यूह, शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह कहलाता है यदि इसके सभी अवयव शून्य हों। हम शून्य आव्यूह को O द्वारा निरूपित करते हैं।

(viii) दो आव्यूह $A = [a_{ij}]$ तथा $B = [b_{ij}]$ समान कहलाते हैं यदि

(a) वे समान कोटि के हों, तथा

(b) A का प्रत्येक अवयव, B के संगत अवयव के समान हो, अर्थात्, $i$ तथा $j$ के सभी मानों के लिए $a_{ij} = b_{ij}$ हो।

### 3.1.4 *आव्यूहों का योग (Addition of matrices)*

दो आव्यूहों का योग तभी संभव है जब वे समान कोटि के हों।

### 3.1.5 *एक आव्यूह का एक अदिश से गुणन (Multiplication of matrix by a scalar)*

यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक आव्यूह है तथा $k$ एक अदिश है तो $kA$ एक ऐसा आव्यूह है जिसे A के प्रत्येक अवयव को $k$ से गुणा करके प्राप्त किया जाता है, अर्थात्, $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$

### 3.1.6 *आव्यूह का ऋण आव्यूह* (*Negative of a matrix*)

किसी आव्यूह A का ऋण आव्यूह –A से निरूपित होता है। हम –A को (–1)A द्वारा परिभाषित करते हैं।

### 3.1.7 *आव्यूहों का गुणन* (*Multiplication of matrices*)

दो आव्यूहों A और B का गुणनफल तभी AB परिभाषित होता है जब A के स्तंभों की संख्या, B की पंक्तियों की संख्या के समान होती है।

मान लीजिए कि $A = [a_{ij}]$, एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है और $B = [b_{jk}]$, एक $n \times p$ कोटि का आव्यूह है। तब A और B आव्यूहों का गुणनफल, एक $m \times p$ कोटि का आव्यूह C होता है। आव्यूह C का $(i, k)$वाँ अवयव $c_{ik}$ प्राप्त करने के लिए हम A की $i$वीं पंक्ति और B के $k$वें स्तंभ को लेते हैं और फिर उनके अवयवों का क्रमानुसार गुणन करते हैं और फिर इन सभी गुणनफलों का योगफल ज्ञात कर लेते हैं, अर्थात्

$$c_{ik} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + a_{i3}\, b_{3k} + \ldots + a_{in}\, b_{nk}$$

आव्यूह $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ A तथा B का गुणनफल है।

**टिप्पणी**

1. यदि AB परिभाषित है तब यह आवश्यक नहीं हैं कि BA भी परिभाषित हो।
2. यदि A और B क्रमशः $m \times n$ तथा $k \times l$, कोटि के आव्यूह हैं तब दोनों AB तथा BA तभी और केवल तभी परिभाषित होंगे जब $n = k$ तथा $l = m$ हो।
3. यदि AB और BA दोनों परिभाषित हैं तो यह आवश्यक नहीं है कि AB = BA हो।
4. यदि दो आव्यूहों का गुणनफल एक शून्य आव्यूह हो तो यह आवश्यक नहीं है कि उनमें से एक शून्य आव्यूह है।
5. समान कोटि के तीन A, B और C आव्यूहों के लिए यदि A = B, हो तब AC = BC होगा परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है।
6. $A.\, A = A^2$, $A.\, A.\, A = A^3$, इत्यादि

### 3.1.8 *आव्यूह का परिवर्त* (*Transpose of a Matrix*)

1. यदि $A = [a_{ij}]$ एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है तो A की पंक्तियों तथा स्तंभों को परस्पर बदलने (*interchange*) से प्राप्त होने वाला आव्यूह A का परिवर्त कहलाता है।

   आव्यूह A के परिवर्त को $A'$ या $(A^T)$ से निरूपित करते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ हो तो $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ होगा।

2. **आव्यूहों के परिवर्त के गुणधर्म ( Properties of transpose of a matrix )**

उपयुक्त कोटि के किन्हीं A तथा B आव्यूहों के लिए

(i) $(A^T)^T = A$ (ii) $(kA)^T = kA^T$ (जहाँ $k$ कोई अचर है)

(iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$ (iv) $(AB)^T = B^T A^T$

### 3.1.9 *सममित आव्यूह तथा विषम सममित आव्यूह (Symmetric Matrix and Skew Symmetric Matrix)*

(i) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A^T = A$ हो, अर्थात्, $i$ व $j$ के प्रत्येक संभव मानों के लिए $a_{ij} = a_{ji}$ हो।

(ii) एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ विषम सममित आव्यूह कहलाता है यदि $A^T = -A$ हो, अर्थात्, $i$ तथा $j$ के प्रत्येक संभव मानों के लिए $a_{ji} = -a_{ij}$ हो।

**टिप्पणी :** किसी विषम सममित आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव शून्य होते हैं।

(iii) **प्रमेय 1:** वास्तविक अवयवों वाले किसी वर्ग आव्यूह A के लिए $A + A^T$ एक सममित आव्यूह है तथा $A - A^T$ एक विषम सममित आव्यूह है।

(iv) किसी वर्ग आव्यूह को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूहों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है अर्थात्,

$$A = \frac{(A + A^T)}{2} + \frac{(A - A^T)}{2}$$

### 3.1.10 *व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrices)*

यदि A, कोटि $m \times m$, का एक वर्ग आव्यूह है और समान कोटि $m \times m$ का एक अन्य आव्यूह B का अस्तित्व इस प्रकार है कि $AB = BA = I$ है तो A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहते हैं तथा B को A का व्युत्क्रम आव्यूह कहते हैं और इसे $A^{-1}$ द्वारा निरूपित करते हैं।

**टिप्पणी**

1. किसी आयताकार आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह नहीं होता है क्योंकि गुणनफल AB तथा BA के परिभाषित और समान होने के लिए यह अनिवार्य है कि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हों।

2. यदि आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम है तो आव्यूह A, आव्यूह B का व्युत्क्रम होता है।

3. (व्युत्क्रम आव्यूह की अद्वितीयता): किसी वर्ग आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह, यदि उसका अस्तित्व है तो वह अद्वितीय होता है।

4. यदि A तथा B समान कोटि के व्युत्क्रमणीय आव्यूह हों तो $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ होता है।

### 3.1.11 *प्रारंभिक पंक्ति तथा स्तंभ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा एक आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a matrix using elementary row or column operations)*

प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा $A^{-1}$ ज्ञात करने के लिए, A = IA लिखिए और पंक्ति संक्रियाओं का प्रयोग A = IA पर तब तक करते रहिए जब तक I = BA नहीं मिल जाता है। इस प्रकार प्राप्त आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम होगा। इसी प्रकार यदि हम स्तंभ संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा $A^{-1}$ ज्ञात करना चाहते हैं तो A = AI लिखिए और A = AI पर स्तंभ संक्रियाओं का प्रयोग तब तक करते रहिए जब तक हमें I = AB प्राप्त नहीं हो जाता है।

**टिप्पणी :** उस दशा में जब A = IA (या A = AI) पर एक या अधिक प्रारंभिक पंक्ति (या स्तंभ) संक्रियाओं के करने पर यदि बाएँ पक्ष के आव्यूह A की एक या अधिक पंक्तियों (या स्तंभों) के सभी अवयव शून्य हो जाते हैं तो $A^{-1}$ का अस्तित्व नहीं होता है।

## 3.2 हल किए हुए उदाहरण (Solved Examples)

### लघु उत्तरीय (Short Answer)

**उदाहरण 1** आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij}$ इस प्रकार हैं कि $a_{ij} = e^{2ix} \sin jx$.

**हल** $i = 1, j = 1,$ के लिए, $a_{11} = e^{2x} \sin x$

$i = 1, j = 2,$ के लिए, $a_{12} = e^{2x} \sin 2x$

$i = 2, j = 1,$ के लिए, $a_{21} = e^{4x} \sin x$

$i = 2, j = 2,$ के लिए, $a_{22} = e^{4x} \sin 2x$

इस प्रकार,
$$A = \begin{bmatrix} e^{2x} \sin x & e^{2x} \sin 2x \\ e^{4x} \sin x & e^{4x} \sin 2x \end{bmatrix}$$

**उदाहरण 2** यदि $A = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}, B = \begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{matrix}, C = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, D = \begin{matrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{matrix}$, हों तो A + B,

B + C, C + D और B + D योगफलों में कौन से योगफल परिभाषित हैं।

**हल** केवल B + D ही परिभाषित है क्योंकि केवल समान कोटि के आव्यूहों का ही योगफल संभव है।

**उदाहरण 3** सिद्ध कीजिए यदि एक आव्यूह सममित तथा विषम सममित दोनों ही हो तो वह एक शून्य आव्यूह है।

**हल** माना आव्यूह $A = [a_{ij}]$ दोनों ही सममित तथा विषम सममित है।

क्योंकि A एक विषम सममित आव्यूह है इसलिए $A' = -A$

अतः $i$ तथा $j$ के सभी मानों के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$. (1)

पुनः, क्योंकि A एक सममित आव्यूह है इसलिए $A' = A$

अतः $i$ और $j$ के सभी मानों के लिए $a_{ji} = a_{ij}$ (2)

इस प्रकार (1) तथा (2), से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$a_{ij} = -a_{ij}$, सभी $i$ तथा $j$ के लिए या $2a_{ij} = 0$,

अर्थात्, सभी $i$ और $j$ के लिए $a_{ij} = 0$ है। अतः A एक शून्य आव्यूह है।

**उदाहरण 4** यदि $[2x \quad 3]\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 8\end{bmatrix} = O$ हो तो $x$ का मान निकालिए।

**हल** दिया है

$$[2x \quad 3]\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 8\end{bmatrix} = O \Rightarrow [2x-9 \quad 4x]\begin{matrix}x\\ 8\end{matrix} = [0]$$

या $[2x^2 - 9x + 32x] = [0] \quad \Rightarrow 2x^2 + 23x = 0$

या $x(2x + 23) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, x = \frac{-23}{2}$

**उदाहरण 5** यदि A एक $3 \times 3$ कोटि का व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो दिखाइए कि किसी भी अदिश $k$ (शून्येतर) के लिए $kA$ व्युत्क्रमणीय है तथा $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

**हल** हम जानते हैं कि

$$(kA)\left(\frac{1}{k}A^{-1}\right) = \left(k.\frac{1}{k}\right)(A.\,A^{-1}) = 1\,(I) = I$$

अत: $(kA)$, आव्यूह $\frac{1}{k}A^{-1}$ का व्युत्क्रम है अथवा $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

## दीर्घ उत्तरीय ( L.A )

**उदाहरण 6** आव्यूह A को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ है।

**हल** हम जानते हैं कि यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \text{ है तब } A' = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

अत:,
$$\frac{A + A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 11 & -5 \\ 11 & 6 & 3 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

तथा
$$\frac{A - A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -7 \\ 3 & 0 & 7 \\ 7 & -7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

इस प्रकार,

$$\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}=\begin{bmatrix}2 & \frac{11}{2} & \frac{-5}{2}\\ \frac{11}{2} & 3 & \frac{3}{2}\\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \frac{-3}{2} & \frac{-7}{2}\\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2}\\ \frac{7}{2} & \frac{-7}{2} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & -6\\ 7 & 3 & 5\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}=A.$$

**उदाहरण 7** यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि A, समीकरण $A^3-4A^2-3A+11I=O$ को संतुष्ट करता है।

**हल** $$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+6+2 & 3+0+4 & 2-3+6\\ 2+0-1 & 6+0-2 & 4+0-3\\ 1+4+3 & 3+0+6 & 2-2+9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 7 & 5\\ 1 & 4 & 1\\ 8 & 9 & 9\end{bmatrix}$$

और, $$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}9 & 7 & 5\\ 1 & 4 & 1\\ 8 & 9 & 9\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+14+5 & 27+0+10 & 18-7+15 \\ 1+8+1 & 3+0+2 & 2-4+3 \\ 8+18+9 & 24+0+18 & 16-9+27 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix}$$

अब $A^3 - 4A^2 - 3A + 11(I)$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 37 & 26 \\ 10 & 5 & 1 \\ 35 & 42 & 34 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28-36-3+11 & 37-28-9+0 & 26-20-6+0 \\ 10-4-6+0 & 5-16+0+11 & 1-4+3+0 \\ 35-32-3+0 & 42-36-6+0 & 34-36-9+11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

**उदाहरण 8** यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^2 - 4A + 7I = O$

इस परिणाम का प्रयोग करके $A^5$ का मान भी निकालिए।

**हल** यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$,

$$-4A = \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \text{ तथा } 7I = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

इसलिए $A^2 - 4A + 7I = \begin{bmatrix} 1-8+7 & 12-12+0 \\ -4+4+0 & 1-8+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$

$\Rightarrow \qquad A^2 = 4A - 7\,I$

अब $\quad A^3 = A.A^2 = A\,(4A - 7\,I) = 4\,(4A - 7\,I) - 7A$

$= 16A - 28\,I - 7A = 9A - 28\,I$

पुनः $\quad A^5 = A^3A^2$

$= (9A - 28\,I)\,(4A - 7\,I)$

$= 36A^2 - 63A - 112A + 196\,I$

$= 36\,(4A - 7\,I) - 175A + 196\,I$

$= -31A - 56\,I$

$= -31\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 56\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -118 & -93 \\ 31 & -118 \end{bmatrix}$

## बहु विकल्पीय प्रश्न (Objective Type Questions)

*उदाहरण 9 से 12 तक प्रत्येक के लिए दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए-*

**उदाहरण 9** यदि A और B समान कोटि के दो आव्यूह हैं तो (A + B) (A – B) बराबर है।

(A) $A^2 - B^2$ (B) $A^2 - BA - AB - B^2$

(C) $A^2 - B^2 + BA - AB$ (D) $A^2 - BA + B^2 + AB$

**हल** सही उत्तर (C) है। $(A + B)\,(A - B) = A\,(A - B) + B\,(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$

**उदाहरण 10** यदि $A = \begin{matrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 5 & 1 \end{matrix}$ और $B = \begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{matrix}$ तब

(A) केवल AB परिभाषित है। (B) केवल BA परिभाषित है।

(C) AB तथा BA दोनों परिभाषित हैं। (D) AB तथा BA दोनों ही परिभाषित नहीं हैं।

**हल** सही उत्तर (C) है। यहाँ $A = [a_{ij}]_{2\times3}$ $B = [b_{ij}]_{3\times2}$ है इसलिए AB तथा BA दोनों ही परिभाषित हैं।

**उदाहरण 11** आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ है

(A) अदिश आव्यूह (B) विकर्ण आव्यूह

(C) तत्समक आव्यूह (D) वर्ग आव्यूह

**हल** सही उत्तर (D) है।

**उदाहरण 12** यदि A और B समान कोटि के दो सममित आव्यूह हैं तब $(AB' - BA')$ है एक

(A) विषम सममित आव्यूह (B) शून्य आव्यूह

(C) सममित आव्यूह (D) उपर्युक्त में से कोई नहीं

**हल** सही उत्तर (A) है क्योंकि

$$(AB' - BA')' = (AB')' - (BA')'$$
$$= (BA' - AB')$$
$$= -(AB' - BA')$$

*उदाहरण 13 से 15 तक प्रत्येक में रिक्त स्थान को भरिए–*

**उदाहरण 13** यदि A और B समान कोटि की दो विषम सममित आव्यूह हों तो AB एक सममित आव्यूह होगा यदि ________

**हल** AB = BA.

**उदाहरण 14** यदि A और B समान कोटि के आव्यूह हैं तब $(3A - 2B)' =$ ________

**हल** $3A' - 2B'$

**उदाहरण 15** आव्यूहों का योग तभी परिभाषित है जब प्रत्येक की कोटि ________ है।

**हल** समान

*उदाहरण 16 से 19 तक प्रत्येक के लिए बताइए कि कथन सत्य है या असत्य है–*

**उदाहरण 16** यदि दो आव्यूह A और B समान कोटि के हैं तब 2A + B = B + 2A.

**हल** सत्य

**उदाहरण 17** आव्यूहों का व्यवकलन साहचर्य होता है।

**हल** असत्य

**उदाहरण 18** एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह A के लिए $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

**हल** सत्य

**उदाहरण 19** समान कोटि के किन्ही तीन आव्यूहों के लिए $AB = AC \Rightarrow B = C$

**हल** असत्य

## 3.3 प्रश्नावली

### लघु उत्तरीय (S.A.)

**1.** यदि एक आव्यूह में 28 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?

**2.** यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a & 1 & x \\ 2 & \sqrt{3} & x^2 - y \\ 0 & 5 & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$, तो

(i) A की कोटि लिखिए (ii) A के अवयवों की संख्या लिखिए।

(iii) A के अवयव $a_{23}, a_{31}, a_{12}$ लिखिए।

**3.** एक $a_{2 \times 2}$ आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्न प्रकार से प्राप्त होते हैं

(i) $a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = |-2i + 3j|$

**4.** एक $3 \times 2$ आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = e^{i.x}\sin jx$ द्वारा दिए गए हैं।

**5.** यदि A = B हों तो $a$ और $b$ के मान ज्ञात कीजिए, जहाँ

$A = \begin{bmatrix} a+4 & 3b \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2a+2 & b^2+2 \\ 8 & b^2-5b \end{bmatrix}$ हैं।

**6.** यदि संभव हो तो A और B आव्यूहों का योग ज्ञात कीजिए जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & 6 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

**7.** यदि $X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ और $Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ हों तो ज्ञात कीजिए

(i) $X + Y$ (ii) $2X - 3Y$

(iii) एक आव्यूह Z जो इस प्रकार हो कि $X + Y + Z$ एक शून्य आव्यूह हो।

**8.** आव्यूह समीकरण

$$x\begin{bmatrix} 2x & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 8 & 5x \\ 4 & 4x \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} (x^2+8) & 24 \\ (10) & 6x \end{bmatrix}$$

को संतुष्ट करने वाले $x$ के शून्येतर मान निकालिए।

**9.** यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ हैं तो दिखाइए कि $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

**10.** दर्शाइए कि यदि $\begin{bmatrix} 1 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ हो तो $x$ का मान ज्ञात कीजिए।

**11.** दर्शाइए कि $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ समीकरण $A^2 - 3A - 7I = O$ को संतुष्ट करता है और इसके प्रयोग से $A^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

**12.** आव्यूह समीकरण

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ को संतुष्ट करने वाले आव्यूह A ज्ञात कीजिए।

**13.** यदि $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ हो तो A ज्ञात कीजिए।

**14.** यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $(BA)^2 \neq B^2A^2$.

**15.** यदि संभव हो तो BA और AB ज्ञात कीजिए जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ और } B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

**16.** एक उदाहरण की सहायता से दिखाइए कि जब आव्यूह $A \neq O, B \neq O$ हो तब भी $AB = O$ आव्यूह हो।

**17.** यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ हों तो क्या $(AB)' = B'A'$ है?

**18.** $x$ तथा $y$ के लिए हल कीजिए

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -11 \end{bmatrix} = O$$

**19.** यदि X और Y, $2 \times 2$ कोटि के आव्यूह हों तो निम्नलिखित समीकरणों को X और Y के लिए हल कीजिए

$$2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad 3X + 2Y = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

**20.** यदि $A = [3 \quad 5]$, $B = [7 \quad 3]$ हों तो एक शून्येतर आव्यूह C ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हो कि $AC = BC$.

**21.** आव्यूह A, B और C के ऐसे उदाहरण दीजिए जो इस प्रकार हों कि AB = BC, जहाँ A एक शून्येतर आव्यूह है परंतु $B \neq C$ है।

**22.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, हों तो सत्यापित कीजिए :

(i) (AB) C = A (BC) (ii) A (B + C) = AB + AC.

**23.** यदि $P = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ और $Q = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ तो

सिद्ध कीजिए कि $PQ = \begin{bmatrix} xa & 0 & 0 \\ 0 & yb & 0 \\ 0 & 0 & zc \end{bmatrix} = QP$.

**24.** यदि $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = A$ हो तो A ज्ञात कीजिए।

**25.** यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ और $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि A (B + C) = (AB + AC)

**26.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $A^2 + A = A(A + I)$ जहाँ I एक $3 \times 3$ तत्समक आव्यूह है।

**27.** यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ हों तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A')' = A$ (ii) $(AB)' = B'A'$ (iii) $(kA)' = (kA')$

**28.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ हों तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(2A + B)' = 2A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

**29.** सिद्ध कीजिए कि किसी भी आव्यूह A के लिए $A'A$ तथा $AA'$ दोनों ही सममित आव्यूह हैं।

**30.** माना A और B, $3 \times 3$ के वर्ग आव्यूह हैं। क्या $(AB)^2 = A^2 B^2$ सत्य है? कारण बताइए।

**31.** दिखाइए कि यदि A और B वर्ग आव्यूह हैं तथा $AB = BA$ है, तब

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

**32.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $a = 4, b = -2$ हों तो दिखाइए कि

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (b) $A(BC) = (AB)C$

(c) $(a + b)B = aB + bB$ (d) $a(C-A) = aC - aA$

(e) $(A^T)^T = A$ (f) $(bA)^T = b A^T$

(g) $(AB)^T = B^T A^T$ (h) $(A - B)C = AC - BC$

(i) $(A - B)^T = A^T - B^T$

**33.** यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

**34.** यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ और $x^2 = -1$ हो तो दिखाइए कि $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

**35.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि $A^2 = I$

**36.** गणितीय आगम के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि किसी भी वर्ग आव्यूह के लिए $(A')^n = (A^n)'$, जहाँ $n \in \mathbf{N}$

**37.** प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से निम्नलिखित आव्यूहों का व्युत्क्रम (यदि संभव हो तो) ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

**38.** यदि $\begin{bmatrix} xy & 4 \\ z+6 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & w \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$, हो तो $x, y, z$ और $w$ के मान ज्ञात कीजिए।

**39.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ हों तो एक ऐसा आव्यूह C ज्ञात कीजिए कि $3A + 5B + 2C$ एक शून्य आव्यूह हो।

**40.** यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ हो तो $A^2 - 5A - 14$ ज्ञात कीजिए और फिर इसके प्रयोग से $A^3$ ज्ञात कीजिए।

**41.** यदि $3\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 6 \\ -1 & 2d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & a+b \\ c+d & 3 \end{bmatrix}$ हो तो $a, b, c$ और $d$ के मान ज्ञात कीजिए।

**42.** आव्यूह A ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हो कि

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

**43.** यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो $A^2 + 2A + 7I$ ज्ञात कीजिए।

**44.** यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा $A^{-1} = A'$ हो तो $\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।

**45.** यदि $\begin{bmatrix} 0 & a & 3 \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह हो तो $a, b$ और $c$ के मान ज्ञात कीजिए।

**46.** यदि $P(x) = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$, हो तो दिखाइए कि

$P(x) \,.\, P(y) = P(x + y) = P(y) \,.\, P(x)$

**47.** यदि A एक वर्ग आव्यूह है जो $A^2 = A$ को संतुष्ट करता है तो दिखाइए कि $(I + A)^2 = 7A + I$

**48.** यदि A तथा B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं और B एक विषम सममित आव्यूह है तो दिखाइए कि $A'BA$ एक विषम सममित आव्यूह है।

## दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

**49.** यदि किन्ही दो वर्ग आव्यूहों के लिए $AB = BA$ हो तो गणितीय आगम से सिद्ध कीजिए कि $(AB)^n = A^n B^n$

**50.** यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ इस प्रकार हो कि $A' = A^{-1}$ तो $x, y$ तथा $z$ के मान ज्ञात कीजिए।

**51.** यदि संभव हो तो प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से निम्नलिखित आव्यूहों का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

**52.** आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में लिखिए।

## बहु विकल्पीय प्रश्न (Objective type questions)

*प्रश्न 53 से 67 तक दिए गए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–*

**53.** आव्यूह $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ है

(A) वर्ग आव्यूह (B) विकर्ण आव्यूह

(C) तत्समक आव्यूह (D) इनमें से कोई नहीं

**54.** कोटि $3 \times 3$ के सभी संभव आव्यूहों की संख्या जिनकी प्रत्येक प्रविष्ठि 2 या 0 हो, होगी

(A) 9 (B) 27 (C) 81 (D) 512

**55.** यदि $\begin{matrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{matrix} = \begin{matrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{matrix}$, हो तो $x$ तथा $y$ के मान होंगे

(A) $x = 3, y = 1$ (B) $x = 2, y = 3$

(C) $x = 2, y = 4$ (D) $x = 3, y = 3$

**56.** यदि $A = \dfrac{1}{\pi}\begin{matrix} \sin^{-1}(x\pi) & \tan^{-1}\dfrac{x}{\pi} \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{\pi} & \cot^{-1}(\pi x) \end{matrix}$, $B = \dfrac{1}{\pi}\begin{matrix} -\cos^{-1}(x\pi) & \tan^{-1}\dfrac{x}{\pi} \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{\pi} & -\tan^{-1}(\pi x) \end{matrix}$,

हो तो $A - B$ बराबर है

(A) I (B) 0 (C) 2 I (D) $\dfrac{1}{2}$ I

**57.** यदि A और B क्रमश: $3 \times m$ और $3 \times n$, कोटि के दो आव्यूह हों तथा $m = n$, हो तो आव्यूह $(5A - 2B)$ की कोटि होगी

(A) $m \times 3$ (B) $3 \times 3$ (C) $m \times n$ (D) $3 \times n$

**58.** यदि $A = \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$, तो $A^2$ बराबर है

(A) $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ (B) $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}$ (C) $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ (D) $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

**59.** यदि आव्यूह $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ इस प्रकार है कि

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 1 \text{ यदि } i \neq j \\ 0 \text{ यदि } i \neq j \end{bmatrix}$$ तब $A^2$ बराबर है

(A) I (B) A (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं

**60.** आव्यूह $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$ एक

(A) तत्समक आव्यूह है। (B) सममित आव्यूह है।

(C) विषम सममित आव्यूह है। (D) इनमें से कोई नहीं।

**61.** आव्यूह $\begin{matrix} 0 & -5 & 8 \\ 5 & 0 & 12 \\ -8 & -12 & 0 \end{matrix}$

(A) विकर्ण आव्यूह है। (B) सममित आव्यूह है।

(C) विषम सममित आव्यूह है। (D) अदिश आव्यूह है।

**62.** यदि A एक $m \times n$ कोटि का आव्यूह है और B इस प्रकार का आव्यूह है कि $AB'$ और $B'A$ दोनों ही परिभाषित हों तो आव्यूह B की कोटि होगी

(A) $m \times m$ (B) $n \times n$ (C) $n \times m$ (D) $m \times n$

**63.** यदि A और B समान कोटि के आव्यूह हों तो $(AB'-BA')$

(A) विषम सममित आव्यूह है। (B) रिक्त (शून्य)आव्यूह है।

(C) सममित आव्यूह है। (D) तत्समक आव्यूह है।

**64.** यदि A इस प्रकार की आव्यूह है कि $A^2 = I$, तब $(A-I)^3 + (A+I)^3 - 7A$ बराबर होगा

(A) A (B) $I - A$ (C) $I + A$ (D) 3A

**65.** किन्हीं दो A और B आव्यूहों के लिए कौन सा सदैव सत्य है

(A) $AB = BA$ (B) $AB \neq BA$ (C) $AB = O$ (D) इनमें से कोई नहीं

**66.** प्रारंभिक स्तंभ संक्रिया $C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$ का प्रयोग आव्यूह समीकरण

$\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{matrix}$, में करने पर हमें प्राप्त होता है

(A) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  (B) $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{matrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{matrix}$  (D) $\begin{matrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

**67.** प्रारंभिक पंक्ति संक्रिया $R_1 \to R_1 - 3R_2$ का प्रयोग आव्यूह समीकरण

$\begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$, में करने पर हमें प्राप्त होता है

(A) $\begin{matrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & -7 \\ 0 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$  (B) $\begin{matrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

(C) $\begin{matrix} -5 & -7 \\ 3 & 3 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{matrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$  (D) $\begin{matrix} 4 & 2 \\ -5 & -7 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

*प्रश्न 68 से 81 तक प्रत्येक में रिक्त स्थानों को भरिए-*

**68.** __________ आव्यूह दोनों ही सममित तथा विषम सममित आव्यूह हैं।

**69.** दो विषम सममित आव्यूहों का योग सदैव __________ आव्यूह होता है।

**70.** किसी आव्यूह का ऋण आव्यूह इसको __________ से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

**71.** किसी आव्यूह को एक अदिश __________ से गुणा करने पर शून्य आव्यूह प्राप्त होता है।

**72.** एक आव्यूह जो आवश्यक नहीं कि वर्ग आव्यूह हो एक __________ आव्यूह कहलाता है।

**73.** आव्यूहों का गुणनफल, योग का __________ करता है।

**74.** यदि A एक सममित आव्यूह है तो $A^3$ एक __________ आव्यूह होगा।

**75.** यदि A एक विषम सममित आव्यूह है तो $A^2$ एक __________ है।

**76.** यदि A और B समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं तो

(i) $(AB)' =$ __________

(ii) $(kA)' =$ __________ ($k$ कोई अदिश है।)

(iii) $[k(A - B)]' =$ __________

**77.** यदि A विषम सममित आव्यूह है तो $k$A ($k$ कोई अदिश है) एक __________ है।

**78.** यदि A और B सममित आव्यूह हैं तो

(i) AB – BA __________ है। (ii) BA – 2AB __________ है।

**79.** यदि A सममित आव्यूह है तो B′AB __________ है।

**80.** यदि A और B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो AB सममित आव्यूह होगा यदि और केवल यदि __________

**81.** एक या अधिक प्रारंभिक पंक्ति संक्रियाओं के प्रयोग से $A^{-1}$ ज्ञात करते समय यदि एक या एक से अधिक पंक्तियों के सभी अवयव शून्य हो जाएँ तो $A^{-1}$ __________ होता है।

*प्रश्न* 82 *से* 101 *तक बताइए कि कथन सत्य हैं या असत्य–*

**82.** एक आव्यूह एक संख्या को निरूपित करता है।

**83.** किसी भी कोटि के आव्यूहों को जोड़ा जा सकता है।

**84.** दो आव्यूह समान होते हैं यदि उनकी पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या समान हो।

**85.** असमान कोटि वाले आव्यूहों को घटाया नहीं जा सकता है।

**86.** आव्यूहों का योग, साहचर्य तथा क्रम विनिमेय दोनों ही नियमों का पालन करता है।

**87.** आव्यूहों का गुणन क्रम विनिमेय होता है।

**88.** एक वर्ग आव्यूह जिसका प्रत्येक अवयव 1 हो तो उसे तत्समक आव्यूह कहते हैं।

**89.** यदि A और B दो समान कोटि के आव्यूह हैं तब A + B = B + A होता है।

**90.** यदि A और B दो समान कोटि के आव्यूह हैं तो A – B = B – A होता है।

**91.** यदि आव्यूह AB = O, तब A = O या B = O या दोनों A और B शून्य आव्यूह हैं।

**92.** एक स्तंभ आव्यूह का परिवर्त स्तंभ आव्यूह होता है।

**93.** यदि A और B समान कोटि के दो वर्ग आव्यूह हैं तब AB = BA है।

**94.** यदि समान कोटि के तीनों आव्यूह सममित हैं तब उनका योग भी सममित आव्यूह है।

**95.** यदि A और B समान कोटि के कोई दो आव्यूह हैं तब (AB)′ = A′B′

**96.** यदि $(AB)' = B' A'$, जहाँ A और B वर्ग आव्यूह नहीं है तब A के पंक्तियों की संख्या B के स्तंभों की संख्या के बराबर होगी तथा A के स्तभों की संख्या B के पंक्तियों की संख्या के बराबर होगी।

**97.** यदि A, B और C समान कोटि के वर्ग आव्यूह हैं तब $AB = AC$ से सदैव $B = C$ प्राप्त होता है।

**98.** किसी भी आव्यूह A के लिए $AA'$ सदैव सममित आव्यूह होता है।

**99.** यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, तब AB और BA दोनों परिभाषित हैं तथा समान हैं।

**100.** यदि A विषम सममित आव्यूह है तो $A^2$ सममित आव्यूह होगा।

**101.** $(AB)^{-1} = A^{-1}. B^{-1}$ जहाँ A और B व्यूत्क्रमणीय आव्यूह हैं जो गुणन के क्रम – विनिमेय नियम को संतुष्ट करते हैं।